

УДК 091+930

**ПЕРВАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА
В ЗОЛОТООРДЫНСКОМ ГОСУДАРСТВЕ –
ШЕДЕВР В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
(«АТ-ТУХФЕ ФИ ‘ИЛМ АЛ-ХИСАБ») (2)***

Ихсан Фазлыоглу

(Университет «Меденият», Стамбул)

Автор данной статьи представляет первый установленный пример научной деятельности в Золотой Орде, начавшейся до Джанибек-хана, во время правления хана Узбека. Произведение, написанное в Золотой Орде на математическую тему, занимает особое место благодаря содержащейся в нем информации. Этот трактат показывает, что научная деятельность в Золотой Орде, начатая с принятием ислама, за короткое время принесла результат и заложила основы «прорыва» во время правления Джанибек-хана.

Автор исследует данное сочинение с исторической точки зрения. Вычислительная книга «ат-Тухфе фи ‘илм ал-хисаб», автор которой неизвестен, во время правления Узбек-хана (1313–1342) была передана правителю Крымского улуса Золотой Орды Абулмузаффару Гиясадину Тулуктемирбею. После упоминания отличительных черт произведения, автор уделяет особое внимание определению чисел, которое приписывается Мухаммеду б. Муса ал-Хорезми и которое, на настоящий момент, не зафиксировано в других источниках. Автор оспаривает способность понимания доказательства, используемого в вычислении, межевании и алгебре, и рассмотрит определения относительно теории чисел. В дальнейшем, автор проанализирует формулы приближительных значений квадратных и кубических корней иррациональных чисел, предложенных Мухаммедом ал-Хорезми, ‘Абдулкахиром ал-Багдади и учителем автора, Садруддином ал-Фарази.

В этой части будет рассмотрен автор произведения и особенности его эпохи, ознакомление с научной средой, сделавшей возможным написание «ат-Тухфе фи ‘илм ал-хисаб», изложение содержания и будет ознакомление с учеными и их произведениями, на которых ссылался автор. До наших дней дошли два экземпляра произведения. «ат-Тухфе», прежде всего, берет за основу учение алгоритма системы десятичных чисел, сформированную Хорезми в 813–833 годах.

Ключевые слова: Золотая Орда, Узбек-хан, математика, алгебра, Дашт-и Кыпчак, ислам.

* Продолжение. Начало см.: Золотоордынское обозрение. 2014. № 4 (6). С. 57–68. Перевод с турецкого языка Ю.Н. Нагимовой, И.М. Миргалеева.

Шедевр в вычислительной науке: содержание и анализ

В этой главе, прежде всего, будет рассмотрен автор произведения и особенности его эпохи, особенно будет ознакомление с научной средой, сделавшей возможным написание «ат-Тухфе фи 'илм ал-хисаб», будут даны экземпляры из рукописных коллекций со всего мира, будет предоставлено детальное изложение содержания и будет ознакомление с учеными и их произведениями, на которых ссылался автор. После исследования общих характерных черт «Тухфе» с точки зрения математической науки, будет рассмотрено определение чисел, которое возводит к Хорезми, будут всесторонне рассмотрены выдвинутые идеи о понятиях счета, межевании и доказательства в алгебре. Далее будет рассмотрено данное автором определение о главных свойствах чисел в рамках теории простых чисел, и в конце будут проанализированы формулы об установлении приблизительного значения квадратного и кубического корней иррациональных чисел.

I. Автор и эпоха

Автор «ат-Тухфе фи 'илм ал-хисаб» неизвестен. Однако на экземпляре из библиотеки Айасофьи видны исправления языка. То, что эти исправления происходили не в построении предложения, а в таких ситуациях как мужской род (музеккер), женский род (муэннес), единственное число (муфред), двойственное (мусенна) или множественное (джем) числа слова, указывает на то, что автор был иностранцем. Но все же, так как достоверно не известно, принадлежал ли этот экземпляр автору или нет, ошибки могли принадлежать и переписчику. Для окончательного решения наряду с двумя экземплярами в этом труде необходимо иметь и другие экземпляры, если они есть.

По названию и содержанию произведения невозможно судить о дате его написания. Однако передача произведения ал-малик ал-музейед 'Абулмузаффару Гияседуния ва-д дин Тулуктемуру (возможны разночтения: Тулуктемур, Тулуктемур, Тулек Тимур, Тулук Темур), по крайней мере, может помочь при определении регистрации авторского права и региона написания.

¹ الحمد لله المتفرد في علم الأصم من الكعب و الجذر المحيط علمه القديم بالصحيح و الكسر. مقدر الكميات غير موصوف بالكمية , و موجد الكيفيات غير موجود بالكيفير. و الصلاة علي رسوله محمد المكرم بالسنة , و علي آله و أصحابه أخيار الأمم و أشرف البرية. أما بعد, فإني لما رأيت الملك المؤيد أبالمظفر غياث الدنيا و الدين تولكتهمور بك - عظم الله شأنه, وأيد سلطانه - يري طلب العلم علي² ذوي العقول من أوجب الأمور وأكملها, و لإنتحال به من أوفر الخطوط و أجزلها, هممت أن أجمع ما يخلده به ذكره ويقلد به فخره, فاعتهدت علي قصة القبرة, و اختصرته بتحفة في علم الحساب مجتنباً عن الإطناب و مكثفياً بما اشتمل عليه الكتاب.

¹ ب.1

² أ.2

«Хвала Богу, который является единственным в знании квадратных и кубических корней иррациональных чисел, окружил целые и рациональные числа древним знанием, который создал несуществующие величины в природе. И возношу молитву Мухаммеду, бывшему почтенным сунной, его семье, сахабам – избранным людям среди уммы и самым почетным людям на земле. После этого (я говорю): Когда я своими глазами увидел, как ал-Малик ал-муэйд Абулмузаффар Гиясуддуния вед-дин Тулуктемур Бек – пусть Бог возвысит его величие и поможет ему в его царствовании – видел желание знаний разумных людей как самое обязательное и самое великолепное дело и (старался) найти больше и лучшие пути достижения этого, я приступил к собиранию материала, который увековечил бы его имя и передало бы его почет, и, ограничиваясь содержанием и избегая детальности, сократил название книги – Шедевр в вычислительной науке (ат-Тухфе фи ‘илм ал-хисаб)».

Установление личности Тулуктемура, которому был вручен данный труд, является единственным ориентиром для определения времени и места написания произведения. Рамазан Шешен без указания каких-либо источников обозначает, что произведение было написано для бея из Кастамону Гиясуддин Тулуктемура³. Однако при наших тщательных исследованиях мы не нашли бея из Кастамону с таким именем. По нашим утверждениям, Тулуктемур, которому был передан данный труд, является Крымским губернатором Золотой Орды во время правления Узбек-хана, о котором дает сведения Ибн Баттута в своем труде «ар-Рихля», посетивший Крым в 1333 году⁴. Тулуктемур когда Ибн Баттута находился в Крыму сам лично сопровождал его. Поэтому Ибн Баттута в своем произведении шесть раз отмечает Тулуктемура как «Эмир Тулуктемур» и утверждает, что он был Крымским губернатором Мухаммеда Узбек-хана, которого он называет Ас-Султан ал-муаззам (величественный султан). Ибн Баттута в своем произведении говорит о таких ученых из окружения Тулукте-

³ Рамазан Изги – Джеват Изги, «История османской математической литературы» (ред. Экмеледдин Ихсаноглу), том 1, Стамбул 1999, Введение, с. XLIX. Особенно в источниках указывается, что в войне между Ногаем и Токта Ханом один из туменских беев из окружения Токта-хана носил имя Тулек-Тимур. Возможно, что этот туменский бей был тот человек, которому было передано произведение. См. Кафалы, указ. соч., с. 69. С другой стороны, необходимо изучить была ли какая-нибудь связь между вышеупомянутым человеком и Тулек-Тимуром, который упоминается в родословных как казанских, так и крымских ханов. Например см. Курат, указ. соч., с. 79, 158; Абу-л Гази Бахадыр Хан, «Тюркская генеалогия» (Шеджереи Тюрк), изд-во: Рыза Нур, Стамбул, 1925, с. 184.

⁴ По данным Мухаммеда ал-Мухибби, и внук Тулуктемура Али Бег б. Иса после 750/1349 года короткое время исполнял обязанности крымского губернатора; для подробной информации см. Девиз, указ. соч., с. 132.

мура, как Битикчи Мухаммед Ходжа Ал-Хорезми и дает сведения об основанной им обители⁵.

По сведениям, которые дает Ибн Баттута можно сказать, что Крым в то время был представителем высокой исламской культуры. Судя по сведениям, прежде всего, город был большим и красивым. У Тулуктемура был свой индивидуальный имам по имени Садеддин, и при помощи этого имама он отправил лошадь за Ибн Баттутой. С этой лошадью Ибн Баттута направился в обитель, где во главе был человек по имени Шейх-заде ал-Хорасани. Сведения, данные Ибн Баттутой, подтверждают, что религиозно-научная организованность в городе достигла превосходства: в Крыме были два кадийа, главный кадий Шамседдин ас-Саили был ханафитского мазхаба, а второй ученый по имени Хызыр исполнял должность шафиитского кадийа. Ибн Баттута говорит нам о преподавателе фикха Аляуддине ал-Аси; это показывает, что в Крыму в то время, по крайней мере, было хотя бы одно медресе. Так Ибн Баттута отмечает, что встречался с людьми относящимися к научному классу, таких как Шейх Хаким Салих и факих Шейх Салих 'Абид Музаффер ад-дин. С другой стороны, в мечети города Крыма, построенным египетским султаном Мелик ан-Насер обязанность проповедника выполнял человек по имени Абу Бакр относящийся к шафиитскому мазхабу. Несмотря на сжатость информации данной Ибн Баттутой, она показывает на достойную внимания научную среду в городе Крыме в те годы. Так, один из наиболее важных аргументов приведенных выше, находится на уровне произведений упомянутого в классических источниках как крымский кадий (кади-и Кырым) Рукн ад-дин Ахмед б. Мухаммед б. Абду-л мумин ал-Кырыми ал-Ханафи (умер в 783/1381 году) «Шерх сахиб ал-Бухари» и «Меджма ал-ахляк ва ан-насаих». Эта ситуация в Крыму показывает, что там была благоприятная научная среда для написания подобных произведений и их понимания⁶. Поэтому один из очень важных ученых и историков XV века Шамсуддин ас-Сахави в своем произведении «ад-Дау ал-лами» отмечает множество ученых носящих нисбу ал-Кырыми.

⁵ Ибн Баттута, *Рихлят Ибн Баттута*, исследователь Али ал-Мунтасар ал-Кеттани, том 1, Бейрут, 1985, с. 356–366, особенно с. 356, 357, 358, 361, 362 и 364. Для первого указания на Тулуктемура, которому было посвящено данное произведение см. Ихсан Фазлыоглу, «Индийский счет у османов», Исламская энциклопедия Турецкого вакфа по религиозным делам, том XVII, Стамбул, 1998, с. 264. Особенно см. Девиз, указ. соч., с. 132; Кафалы, указ. соч., с. 79.

⁶ Кятиб Челеби, Кешф аз-зунун 'ан асами кутуб ва-л-фунун, изданное Килисли Муаллим Рифат – Шерефутдин Ялткая, том 1–2, Стамбул, 1941–1943, том 1, с. 549; Багдадлы Исмаил Паша, Хедийет ал-арифин, изданное Шерефеттин Ялткая – Килисли Рифат Бильге, Стамбул: 1951–1955, том 2, с. 432; Омар Рыда Кеххале, Муджем ал-муэллифин, том 2, Бейрут, без даты, с. 125.

О том, что такая атмосфера царила и за пределами Крыма, и Сарая, можно вывести по сведениям Ибн Баттуты: для похода в город Азак вместе с Ибн Баттутой Тулуктемур взял с собой имама, кадия, проповедника и преподавателя; эмир города и секретарь Тулуктемура Мухаммед Ходжа ал-Хорезми вместе с кадийем и учащимися медресе города вышли встречать их.

Также по данным Ибн Баттуты понятно, что наряду с распространением ханафитского мазхаба были и приверженцы шафиитского мазхаба. С другой стороны показывается серьезность и строгость организации обители, скорее всего, контролируемое организацией ахив⁷.

В результате, в те годы Золотая Орда во главе со столицей Сараем, также как и город Крым, достигла уровня представления высокой исламской культуры; и собрала ученых, способных написать произведения как «Тухфе». Хорошим примером для Крымского региона, достигшего и продвигающего этот уровень, является математическое произведение «ал-Икна фи 'илм ал-мисаха» неизвестного крымского математика, который был вручен Фатих султан Мехмеду после завоевания Каффы в 1475 году, прибывшего в 1477 в Стамбул. Наш опубликованный труд по содержанию этого произведения, о научном движении, начатом Узбек-ханом и достигшего определенного уровня по математической науке достойно вашего внимания⁸.

II. Экземпляры произведения

По нашим утверждениям до наших дней дошли два экземпляра произведения. По мере того, как будут исследоваться каталоги рукописных произведений, хранящихся в рукописных коллекциях по всему миру, или же станут общедоступны частные коллекции, возможно выявление и других экземпляров.

1. Библиотека Сулеймание, Айасофья номер 2723, страница 107, копия от VIII век по хиджре (?), 9-я строка⁹. На 1а и 107b есть печать султана Баязета II. Султан Баязет II часть произведений, где стоит его печать, унаследовал от отца Фатих султан Мехмеда. Поэтому «Тухфе» может быть одним из произведений, которые были привезены после захвата Крыма Фатих султан Мехмедом. Кроме того на задней обложке есть выражения «Тухфе фи-л-хисаб» и «Китаб бил-Арабиййе фи-л-хисаб» записанные рукой султана Баязета II. Понятно, что потом произведение было переведено в медресе Айасофьи. Также на задней обложке стоит печать султана Махмуда I и печать регистратора и инспектора фондов Харамейн Ахмеда Шейхзаде¹⁰.

⁷ Особенно см. Кафалы, указ. соч., с. 140–142.

⁸ Ихсан Фазлыоглу, «Введение в историю прикладной геометрии: Эль-Икна фи ильмил-мисаха», Дергах йайынлары, Стамбул, 2004.

⁹ Рамазан Шешен, указ. соч., с. 868.

¹⁰ На задней обложке есть примеры алфавита, предположительно, среднеазиатского происхождения.

2. Библиотека муниципалитета Искендерийе номер 3063, страницы 151b–173a (22 страницы), копия от Рабиул-аввал 1116/июль 1704 года. Переписчик: Мустафа (?), 21-я строка. В примечаниях этого экземпляра есть подпись Мустафы б. Убейда (?); исходя из того, что почерки переписчика и пометок, сделанных на полях одинаковы, можно предположить, что они принадлежат одному человеку¹¹.

В данной работе изучены оба экземпляра; однако предпочтение было дано Айасофийскому экземпляру; для критической статьи в данном исследовании, включая эти два экземпляра, необходимо обратить внимание и на другие копии, если таковые существуют.

III. Содержание

Информация и деление на главы, данные в предисловии, не совпадают с делением в содержании экземпляра. Эта ситуация исходит из невнимательности писателя либо переписчика. В данном исследовании было взято за основу деление, не данное в предисловии, а соответствующее содержанию экземпляра.

Произведение состоит из введения и трех частей:

Введение: приводятся похвала Аллаху, салаваты пророку, хвала Тулуктемуру, которому вручено произведение и сведения о содержании (1b).

Первая часть: Предпосылки (1b–3a). Три главы (3a–9a).

Первая глава: Понятие числа, различные виды чисел (3a–5a).

Вторая глава: Виды чисел по особенностям присоединения (5a–6b).

Третья глава: Разъяснение чисел в индийском исчислении (7a–9a).

Вторая часть: Разъяснение исчисления сделанного на табличке. Два вида (9a–93b).

Первый вид. Положительные (целые) числа. Восемь разделов (9a–74a).

Первый раздел. Две главы (9a–11a).

Первая глава: Сложение (9a–11a).

Вторая глава: Доказательство (11a–11b).

Второй раздел. Две главы (12a–16b).

Первая глава: Вычитание (12a–15b).

Вторая глава: Доказательство (15b–16b).

Третий раздел: Об умножении на два. Три главы (16b–20a).

Первая глава: Прямое умножение на два (тадиф ал-мустаким) (16b–18a).

¹¹ «Фихрист махтутат беледийет ал-Искендерийе», подготовил Йусуф Зейдан, Александрия 1996, том 1, номер: 39. Выражаю благодарность своему преподавателю профессору, доктору Рамазану Шешен, который по моей просьбе привез этот экземпляр из Александрийской библиотеки и передал его мне.

Вторая глава: Обратное умножение на два (тадиф ал-макус) (18а–19а).

Третья глава: Доказательство (19а–20а).

Четвертый раздел: О делении на два. Три главы (20а–24а).

Первая глава: Прямое деление на два (тансиф ал-мустаким) (20а–21b).

Вторая глава: Обратное деление на два (тансиф ал-макус) (21b–22b).

Третья глава: Доказательство (23а–24а).

Пятый раздел: Об умножении (24а–26а). Четыре главы (26а–36а).

Первая глава: Умножение известным (распространенным) методом (26а–29а).

Вторая глава: Умножение методом треугольника (29а–31b).

Третья глава: Умножение методом нуля (31b–35а).

Четвертая глава: Доказательство (35b–36а).

Шестой раздел: О делении (35а–36а). Две главы (36а–46b).

Первая глава: Деление (36b–45а).

Вторая глава: Доказательство (45а–46b).

Седьмой раздел: пять глав (46b–59b).

Первая глава: Понятие квадратного корня и принципы, использованные при нахождении квадратного корня (46b–48b).

Вторая глава: Нахождение квадратного корня рациональных чисел (48b–54а).

Третья глава: Нахождение приблизительного значения иррациональных чисел (54а–55b).

Четвертая глава: Нахождение приблизительного значения иррациональных чисел методом нуля (56а–58b).

Пятая глава: Доказательство (58b–59b).

Восьмой раздел: Пять глав (59b–74а).

Первая глава: Понятие кубического корня и принципы, использованные при нахождении кубического корня (59b–61b).

Вторая глава: Нахождение кубического корня рациональных чисел (62а–70b).

Третья глава: Нахождение приблизительного кубического корня иррациональных чисел (70b–71b).

Четвертая глава: Нахождение приблизительного кубического корня иррациональных чисел методом нуля (71b–73а).

Пятая глава: Доказательство (73а–74а).

Второй вид. О положительных рациональных числах. Восемь глав (74а–93b).

Первая глава: Сложение (74а–77а).

Вторая глава: Вычитание (77а–81а).

Третья глава: Умножение на два (81а–82b).

Четвертая глава: Деление на два (82b–83b).

Пятая глава: Умножение (84а–86а).

Шестая глава: Деление (86a–88b).

Седьмая глава: Нахождение квадратного корня (Рациональные и иррациональные – приблизительно) (88b–91a).

Восьмая глава: Нахождение кубического корня (Рациональные и иррациональные – приблизительно) (91–93b).

Третья часть: Проблемы счета в разных видах (93b–107b). В этой части даются 23 проблемы в таких сферах как купля-продажа, вес, взвешивание, аренда, деление, измерение расстояния, почта и деньги и их решение.

IV. Источники

В «Тухфе» наряду с ‘Абулмузаффар Гиясуддин Тулуктемур Бем, которому была вручена работа, упоминаются еще три имени: Хорезми (умер в 240/ок. 854 г), Шамсуддин ас-Сахави, ‘Абдулкахир ал-Багдади (умер в 429/1037 г) и преподаватель неизвестного автора Абу Мансур Мухаммед б. Мухаммед ал-Кахуштевани, известный как Садруддин ал-Фарази. Об упомянутом наряду с хорошо известными нам учеными преподавателем автора Садруддине ал-Фарази на сегодняшний день нет никаких сведений.

О математике, к идеям которого часто обращался и цитировал автор, судя по изложенным мыслям можно сказать, что он был известным в своем периоде и на своей территории. Кроме того его нисба ал-Фараиз указывает на то, что он является знатоком фикха и мусульманского наследственного права. Однако не известно был ли Садруддин ал-Фарази выходцем из Дашт-и Кыпчака или из другого региона, где учился автор. Но, несмотря на это, эти сведения говорят о том, что к математикам, выросшим в мусульманской культуре, добавилось еще одно имя.

Брал ли автор напрямую идеи Хорезми не известно. Информация о приблизительном квадратном корне иррациональных чисел, судя по источникам, присутствует в труде Хорезми по индийскому исчислению; однако те же сведения есть у критикующего Хорезми Абдулкахира ал-Багдади в «ат-Текмиле фи-л хисаб», к которому нас отсылает автор. На наш взгляд, сведения о приблизительном квадратном корне иррациональных числах с отсылкой к Хорезми были взяты из «Текмиле». Эта информация показывает, что «Текмиле» даже в первой половине XV века была в обращении среди математиков¹². Еще одно произведение, на которое ссылается автор, это принадлежащий его преподавателю Садруддину ал-Фарази «Нисаб ал-хуссаб». На сегодняшний день нам не известно ни одного экземпляра этого произведения. Однако надо отметить, что это произведение очень важно, так как неизвестный автор по многим темам ссылается на него. На-

¹² Абду-л кахир б. Тахир ал-Багдади, «ат-Текмиле фи-л хисаб», исследование: Ахмед Селим Саидан, Кувейт, 1985.

пример, автор, опираясь на это произведение, относит к Хорезми интересное определение чисел; однако не поясняет видение по этой теме его преподавателя Садруддина ал-Фарази. Несмотря ни на что, неважно какие источники словесные или нет, сведения которые дает его учитель по данной теме крайне важно и уникально. С данной информацией добавилось еще одно произведение к математическим трудам, составленным в мусульманской культуре.

V. Главные особенности произведения с точки зрения вычислительной науки

«Тухфе», прежде всего, берет за основу учение алгоритма системы десятичных чисел, сформированную Хорезми в 813–833 годах в произведении по индийскому исчислению, написанную в Багдаде и переданную Халифу Мемуну. Эту систему исчисления из-за использования индийских цифр и из-за индийского происхождения идеи называют индийское исчисление (Хисаб ал-хинди)¹³. В этой системе исчисления необходимо присутствие следующих условий:

1. Девять цифр символизирующие числа.
2. Различие между абсолютной и неизвестной величиной числа в зависимости от расположения.
3. Если в каком-то месте показывается отсутствие одного из девяти цифр, указывается только величина расположения, то количество, число и цифра являются нулем.
4. Осуществляемое десятичной системой чисел основанной на этих условиях, приобретший технические особенности систематичное исчисление, действие или алгоритм.
5. Представление общих правил, действий осуществляемых этой техникой.
6. Приведение примеров всем правилам.

Автор, следуя этому порядку, начинает работу, прежде всего, с ознакомлением девяти цифр; даже показывает те цифры, которые в Ираке пишутся по-другому. Здесь и в части задач упоминание автором от третьего лица Ирака, а затем и Багдада, может указывать на тот регион, где он получил образование. Автор, приводящий пример абсолютной величины числа и величине места единиц наряду с идеей о месте единиц берет за основу понятие десятичных чисел.

Интересен тот факт, что ноль обозначен не точкой как в восточном мусульманском мире, а кругом как в западном мусульманском мире и добавляет:

الصففر : دائرة تحفظ المنزلة الخالية عن الحساب.

«Ноль: Это круг защищающий место единиц свободного от счёта» (7b).

¹³ См. Ахмед С. Саидан, «Numeration and arithmetic», Encyclopedia of the History of Arabic Science, edit. Roshdi Rashed, с. II, Нью Йорк, 1966, с. 331–348.

Желание автора обучить алгоритму действий, основанному на десятичной системе чисел, показывает отличие содержания и формы произведения от других математических трудов того времени. В то время как математические труды современников состояли из трех глав на темы индийский или устный счет, алгебра и межевание. Слово вычисление понималось скорее как выполнение действий с изображениями, символизирующими числа: например, символизируя выполняемое действие цифрами, автор часто говорит «это вычисление выполняется таким изображением» (هالحسابو صار بهذا الصورة). Потому что автор выполняет действия устно; однако решения и результаты решения показывает индийскими цифрами; для этого использует слово «изображение».

Возникает вопрос, почему автор символизирует вышеуказанными индийскими изображениями использование нуля как круга в устном решении. Причина этого в том, что автор проживал там, где не было много бумаги; поэтому автор выполняет действия на табличке. Например, автор при объяснении одного действия использует выражение اللوح على الحساب). Табличка – это деревянный инструмент внутри которого был песок, земля или пыль на нем пальцем или длинным инструментом вроде гвоздя писались изображения чисел, то есть цифры, в случае ошибки или окончания вычисления стирались рукой. Поэтому это вычисление называют пыльный счет (хисаб ал-губар), деревянный и земельный счет (хисаб ат-тахт вет-тураб)¹⁴. Это ситуация, как мы раньше упоминали, показывает, что это произведение было написано в регионе, где не было распространено использование бумаги и пера. Потому что в этот период в мусульманских центрах место таблички вытеснялись использованием бумаги и пера; от табличек же, как писал Ибрахим Иклидиси в «ал-Фусул фи хисаб ал-хинди», написанной в Дамаске в 341/952–3 г начали порицать и отказываться¹⁵.

Сколько действий использовал автор в вычислении?: В классическом вычислении следующие действия воспринимались отдельно и каждое объяснялось под новым заголовком: сложение (джем), вычитание (тефрик), умножение на два (тадиф), деление на два (тансиф), умножение (дарб), деление (кысмет) и извлечение корня (теджзир); это делится на два вида извлечение квадратного корня или извлечение кубического корня. В этом вычислении ограничивающимся целыми положительными числами, дробные числа в запутанном положении. В «Тухфе», на что необходимо обратить внимание, в

¹⁴ Мухаммед Сювейси, «Вычисление» (Hesap), Исламская энциклопедия турецкого фонда по делам религии, том XVII, Стамбул, 1998, с. 242–244; у того же автора, «Хесаби-и Хинди», с. 250–262.

¹⁵ Ибрахим ал-Иклидиси, «Китаб ал-фусу фи-л-хисаб ал-хинди», издано Ахмед С. Саидан, 2-е издание, Амман, 1985.

вычислении положительных рациональных чисел, то есть дробных чисел это показ дробных чисел. По этой теме, сделав историческое исследование в исламской культуре, нужно установить корни показа «Тухфе». С другой стороны определение, связанное с этим действием, данное автором, но в особенности исследование свойств умножения заслуживают особое внимание:

الجمع : آخر كمسة عنكمسة زيادة عن عبارته هو.¹⁶

«Сложение: Прибавление одной величины к другой величине»: если $a, b \in R^+$ то $a + b = c$ или $b + a = c, c \in R^+$.

التفريق : منها أكثر كمسة عنكمسة اسقاط عن عبارة هو.¹⁷

«Вычитание: Отнимание одной величины из другой большей величины»: $a, b \in R^+$, если $a > b$ то $a - b = c, c \in R^+$.

التضعيف : ما كانت تمثلي الكمية جعل عن عبارة <عليم>.¹⁸

«Умножение на два: удваивание одной величины»: если $a \in R^+$, то $2 \times a = c, c \in R^+$.

التنصيف : الباقية ما يساوي بالكمية عن اسقاط هو.¹⁹

«Деление на два: Отнимание из одной величины части равной второй части»: если $a \in R^+$, то $\frac{1}{2}a = c, c \in R^+$.

Об умножении автор говорит, сравнивая свои противоречивые идеи:

²⁰في بيان الضرب: اعلم - و ففك الله - أن الضرب أحد أمثال أحد العددين بقدر ما في العدد الآخر من الأحاد. و هذا الحد ليس بجامع لخروج ضرب الواحد²¹ في الواحد و غيره , و ضرب الكسور في الكسور و غيرها منه. و قال بعضهم: أن الضرب تبليغ ما يقال له المضروب و المضروب فيه إلى مقامه, لو نسبت المضروب إليه يكون نسبه كنسبة الواحد إلى المضروب فيه.

قال شخي - رحمه الله - : هذا الحد يستلزم الدور لأن معرفة المضروب و المضروب فيه متوقف إلى معرفة الضرب. وقد تعلق هنا معرفة الضرب إلى أحدهما أو إليهما. والأصح أن يقال أن الضرب تبليغ إحدى الكميتين إلى مقام تكون نسبة إحداهما إليه كنسبة الواحد إلى الأخرى ؛ كثلاثة مثلا، إذا ضربت في الأربعة بصير المجموع إثني عشر؛ و نسبة الثلاثة إليه كنسبة الواحد إلى الأربعة، ونسبو الأربعة إليه كنسبة الواحد إلى الثلاثة. والواحد إذا ضرب في الواحد يكون المجموع واحدا، ونسبة الواحد إلى الواحد كنسبة الواحد إلى الواحد. والتثلث إذا ضرب في النصف، فلمبلغ سدس، ونسبة إحدى الكميتين إليه كنسبة الواحد إلى الأخرى.

«*Определение умножения*: Знай, да поможет тебе Господь, некоторые математики говорили следующее: Умножение это увеличение одной величины на столько, сколько указано во второй величине.

¹⁶ 9 أ

¹⁷ 12 أ

¹⁸ 17 أ

¹⁹ 20 أ

²⁰ 24 أ

²¹ 24 ب

Это определение не обхватывает решение таких примеров как умножение единицы на единицу или другие числа, особенно умножение дробных/рациональных чисел на дробные или другие числа. Некоторые говорят следующее: Умножение – это произведение множимого на множитель; так пусть соотношение при сравнении множимого на результат будет как соотношение множителя на единицу.

Мой учитель, упокой Господь его душу, так сказал: Это определение требует цикличности; потому что знание множимого и множителя связано с умножением. В этом определении знание умножения связано с одним из двух или обоими. Правильнее всего сказать: Умножение это возведение двух величин на такой результат, когда соотношение одного из двух величин на результат равно соотношению одной величины на другую. Например, как три; если умножить на четыре ответ будет двенадцать. Соотношение трех к двенадцати, соотношение одного к четырем равно соотношению четырех к двенадцати, соотношению одного к трем. Если «единицу» умножить на «единицу» ответ будет «единица». Соотношение единицы к единице равно соотношению единицы к единице. При умножении одной третьей на одну вторую ответ будет одна шестая. Соотношение одного из этих двух величин к одной шестой соотношению одного к другой из этих величин».

Можно следующим образом разъяснить высказывания писателя: Умножение, коротко говоря, увеличение одного из двух чисел на количество второго числа. То есть $a \times b = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{b-1} + a_b$ или $a \times b = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{a-1} + b_a$. Однако, по мнению писателя, это определение не объясняет умножение «1» на «1» или на другие числа, умножение дробных чисел между собой или с другими числами.

Исходя из второго определения: $a \times b = c \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b}{c}$ или $a \times b = c \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a}{c}$. Однако, учитель автора Садруддин ал-Фарази, отрицая с точки зрения логики, находит это определение цикличным, объяснение чего-либо с присущими только ему элементами, что использование таких слов как множитель и множимое в определении без знания умножения с точки зрения логики не правильно. Вместо этого, учитывая содержание без использования неизвестных слов, логически исправляя определение, вместо множимого и множителя используется выражение две величины. Примеры, данные автором «ат-Тухфе» для полных чисел, единицы и дробных чисел могут быть выражены вышеуказанной формулой:

$$3 \times 4 = 12 \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \text{ или } 3 \times 4 = 12 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{12}; 1 \times 1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \text{ и на}$$

конец

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} \text{ или } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}$$

²²القسمه: و هو عبارة عن توزيع أجزاء إحدى الكميتين على أخرى على السواء. والمقصود منع
فة نصيب الواحد من المقسوم عليه.

«Деление: Распределение равных частей одной величины на другую величину. Цель деления узнать одну часть (насиб) взятого от делимого»: если $a, b \in R^+$ то $\frac{a}{b} = c, c \in R^+$. «Тогда цель: узнать одну часть a , которая делится b раз, то есть c .» в этом пункте нужно обратить внимание на различие между *делением* и *пропорцией* в классической математике где отсутствуют десятичные дроби. Поэтому если $a > b \Rightarrow \frac{a}{b}$ это *деление*, $a < b \Rightarrow \frac{a}{b}$ *пропорция*.

Писатель при разъяснении темы сначала дает общие правила, затем приводит примеры.

Эти примеры, соответствуя Вавилонской школе, как об этом будет сказано ниже, одновременно могут быть доказательством приведенных общих правил²³. С другой стороны, неизвестный автор проверяет примеры методом доказательства; чаще использует [мод.9].

Несмотря на то, что «Тухфе» основывается на индийском счете, редко есть отсылки к применению пальцев и рук при счете, соответствующему устному счету. Автор при использовании правил устного счета называет их мысленный метод/путь (Тарик ал-фикр: طريق الفكر); метод индийского счета называет привычный/известный метод (Тарик ал-махуд: طريق المعهود); другими словами привычный метод действия, выполняемый на табличке.

В третьей части произведения неизвестного писателя, изучаемые задачи построены в соответствии с целью и решения приведены с примерами, достаточно детальны. Смотри на эти задачи, исключая первую о сумме ряда чисел и последнюю о поиске числа в уме, мы видим, что они не совершаются в уме, а наоборот эти задачи связаны с повседневной жизнью.

Задачи на темы купли-продажи, веса, взвешивания, аренды, дележа, измерения расстояния (измерения пути), почты и денег, жалованья рабочих; местом действия являются города Багдад, Куфе, Рей, либо абстрактное *предполагаемое место*.

Автор «Тухфе» выражение *неизвестный* использует только в части задач, решаемых с четырьмя данными; в рамках этого необходимо указать теоретическую базу (страница 94b–95a). Так:

²⁴وإذا كان كل واحد من هؤلاء مجهولاً فاضرب صاحبه في خلاف جنسه ثم اقسام المبلغ على جنسه فالخارج هو المجهول.²⁵ اعنى اذا جهل الال فاضرب الثانى في الثالث، واقسم المبلغ على الرابع؛

²² 36б.

²³ Ихсан Фазлыоглу, «Ирашад ал-Туллабия 'Илм ал-Хисаб (Справочник для учащихся в вычислительной науке)» // Журнал диванных научных исследований, Стамбул 2002/2, №13, с. 321–322.

²⁴ 94б.

وإذا جهل الثاني فاضرب الأول في الرابع، واقسم المبلغ على الثالث؛ وإذا جهل الثالث فاضرب الرابع في الأول، واقسم المبلغ على الثاني؛ وإذا جهل الرابع فاضرب الثالث على الثاني، واقسم المبلغ على الأول.

«Если какая-нибудь из величин неизвестна, то вторую величину умножь на противоположный вид; результат раздели на похожее число; результат известен. Я хочу сказать, если первое неизвестно, умножь вторую с третьей; результат раздели на четвертую, это тоже известно. Если вторая неизвестна, умножь первую и четвертую, результат раздели на третью. Если третья неизвестна, умножь четвертую с первой, результат раздели на вторую. Если четвертая неизвестна, умножь третью с четвертой, результат раздели на первую.»

То есть, если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$, то

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ 2) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ 3) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \\ 4) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} & \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{aligned}$$

VI. Определение чисел от Хорезми

Определение чисел является одной из самых важных проблем арифметической философии, беря свое начало от древнеегипетской математики до математической философии, основанной на понятиях аритмос и мегетос. Автор по этому поводу дает распространенные в исламской культуре понятия:

²⁶الفصل الأول: اعلم - وفقك الله - أن أكثر الحساب قالوا : إن العدد ما يساوري نصف مجموع حاشيته كثلاثة مثلا؛ فإن حاشيتها العليا أربع و السفلى اثنان، ونصف مجموعهما ثلاثة. وفيه نظر : لأنه يصدق عليه الواحد ²⁷والنصف ؛ وأورده شيخي الهلامة أستاذ الورى أبو منصور محمد بن محمد الكاخشواني المعروف بصدر الدين الفرضي - رحمه الله - في كتابه المسمى بنصاب الحساب. وقال بعضهم : العدد كمية تقتضي القسمة في المحل التي ²⁸تقبل القسمة الصحيحة. وفيه أيضا نظر أورده شيخي في كتابه وقال : سئل محمد بن محمد الخوارزمي عن عدد يكون نصفه وربعه عشرة ، كم هو؟ فقال : ذلك العدد ثلاثة عشر وثلاث ، وسمي المجموع عددا ؛ ولا يصدق عليه هذا الحد ، وهو كان معتمدا عليه في هذا الفن. وقال بعضهم : العدد ما تر كب من الواحد - أي اجتمع - ؛ وأقله اثنان. وهذا أصح العبارات لأن الحساب انفقوا على أن الأقل من اثنين ليس بعدد. [في الهامش بالأحمر : وهذا مما لا يخفى نقضه؛ وقال بعضهم : العدد ما يوجد فيه كميتان صحيحتان.]

²⁵ 95أ.

²⁶ 3أ.

²⁷ 3ب.

²⁸ النصفى - لى.

«Первая глава: Знай, пусть Господь сделает тебя успешным, большинство математиков говорят «число – это половина суммы предыдущего и последующего величин». Как три; последующая величина четыре, предыдущая два; половина суммы этих величин равна трем. В этом отношении есть спор; потому что «единица» и «одна вторая» подходят под это правило. Это мнение великий учитель, наставник человечества, да благословит его Бог, Абу Мансур Мухаммед б. Мухаммед ал-Кахуштивани известный как Садруддин ал-Фарази приводит в своей книге «Нисаб ал-хуссаб». Некоторые говорили так: Число это величина, местами требующая разделения и принимающая полного деления. В отношении этого тоже есть другое мнение; мой учитель упоминает этот взгляд в своей книге и говорит следующее: у Мухаммеда б. Мухаммеда ал-Хорезми спросили, что это за число, у которого половина и одна четвертая десять. Он ответил: это число тринадцать и одна третья; сумма тоже называется число. Определение, на которое опирался Хорезми в вычислительной науке не подходит для числа. Некоторые говорят следующее: Число это то, что составлено из единиц; под этим собранием подразумевается сумма и наименьшая из них два. Это самое верное высказывание; потому что математики едины в том, что величина меньше двух числом не является».

(На задней обложке красными чернилами написано следующее: «Это открыто показывает его недействительность. Некоторые говорили так: Число это то, в чем находятся две полные величины»).

Писатель делает введение на тему определения числа, давая самое распространенное и часто используемое древними математиками, определение: Каждое число равно половине суммы чисел находящихся слева и справа от него (и это равенство симметрично). Поэтому если $1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1$, то $n = \frac{(n-1)+(n+1)}{2}$. На примере данным автором $n = 3$ получается $3 = \frac{2+4}{2}$. Однако, несмотря на то, что это определение дается в математическом содержании, это проблемно для древней математики. Так автор, ссылаясь на своего учителя Садруддина ал-Фарази, говорит, что, исходя из этого правила, можно получить «1» и $\frac{1}{2}$. Цель автора этой цитаты, как будет показано ниже, исходит из принятия принципа, по Аристотелю «1» не число и по определению чисел $\frac{1}{2}$ не является числом. Соответственно, например, при применении вышеуказанного правила получается $1 = \frac{0+2}{2}$; если по старинному понятию не считать «0» числом, то $\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}}{2} = 1$.

Автор говоря, что «число это величина, местами требующая разделения и принимающая полное деление», возвращаясь к понятию

«аритмос» из древнего Египта, перешедшего в Грецию, потом в исламскую культуру определяет число, связывая с непостоянной величиной. Однако снова ссылаясь на произведение своего учителя, соотносит к Хорезми новое определение чисел: когда у Хорезми спросили какое число x в $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 10$, вероятно по созданной им самим алгебре первому из уравнения деталей, то есть $ax = c \Rightarrow x = \frac{c}{a}$ (деление) или $x = \frac{1}{\frac{a}{c}}$ (соотношение) упрощенно будет $3x = 40$; получается $x = 13 + \frac{1}{3}$. Здесь самый важный пункт, на который нужно обратить внимание: это то, что Хорезми говорит, что «сумма это тоже число». В этом высказывании делается акцент на две вещи: Первое, число это не только «аритмос» или «мегетос»; другими словами число существует не только в арифметике, предметом которого является только количество или геометрия, предметом которого также является количество, но и в алгебре; следовательно – как напоминает вавилонская математика, даже величина с приблизительным значением может называться числом. Второе, число вне функциональных связей математики не существует.

Автор, цитируя своего учителя, несмотря на то, что приводит определение Хорезми, не соглашается и открыто выражает свое мнение «определение на которое опирается Хорезми в вычислительной науке не походит для числа». Сразу после отрицания, говоря «число это совокупность единиц» и комментируя слово «построен» словом «собран», указывая на слово «некоторые», показывает, что он принимает определение Аристотеля. Так он открыто показывает традицию, к которой причастно то, что «наименьшим числом является два». Потому что в традиции «единица» первооснова чисел, следовательно, на самом деле числом не является; первое число это два.

На обложке произведения рядом с пометкой о недействительности понятия Хорезми дается новое определение: «Число это то, в чем находятся две полные величины». В основе этого понятия понимание числа как «аритмос».

Несмотря на содержание спора, определение чисел, авторство которого возносится к Хорезми, неизвестный автор, опираясь на знания своего учителя, десятичная система исчисления с алгоритмом и алгебра, основывающаяся на алгебраическом количестве, и наука о противопоставлении, созданная Хорезми, в общем соответствует. В рамках этого, информация, содержащаяся в данной рукописи, крайне важна, так как, насколько мне известно, она не присутствует в других исторических источниках²⁹.

²⁹ Для дополнительной информации см. Ихсан Фазлыоглу, «Определение числа Аристотеля» // Журнал диванных научных исследований, Стамбул, 2004, №15, с. 127–138.

Здесь необходимо отметить и следующий пункт: автор сначала дает понятие чисел и их свойства (теория чисел); далее исследует счет, где числа символизируются девятью изображениями. Потому что в древней математике важна разница между используемой в действии числом и его изображением/цифрой. К примеру, автор говорит следующее:

الحسابعليهايدورصورضعواثسعو احسّاب.

«Математики создали девять изображений, которыми выполняется вычисление» (лист 7a).

VII. «Доказательство» в вычислении, межевании и алгебре

В произведении неизвестного автора достойно внимания короткая информация, данная относительно *доказательства* в вычислении, межевании и алгебре:

³⁰ (...) عند الحساب, و هم اللذين اشتغلوا بنفس الحساب بدون البراهين؛ (...) عند أهل المساحة³¹ و هم الذين يستدلون على استخراج الكميات المجهولة بالبراهين الحسية؛ (...) و عند أهل الجبر و المقبلة, و هم الذين يستدلون على اخراج الكميات المجهولة³² بالبراهين العقلية.

«Счетоводы работают с вычислением без доказательства; те, кто занимаются межеванием, при неизвестной величине делают вывод с чувственным доказательством; те, кто занимаются алгеброй, и сверяющие счета при неизвестной величине делают вывод с умственным доказательством» (46b–47a).

Прежде всего, в выражении автора примеры аргументации в вавилонской школе не видит как доказательство. Потому что он говорит, что счетоводы занимаются самим счетом непосредственно, не берут во внимание доказательство. Здесь подразумевается хисаби хинди, то есть счет, выполненный индийскими цифрами на табличке (или бумаге) с землей, песком или пылью для проверки. Обращается внимание на то, что в вычислении много примеров и, несмотря на это, если иметь в виду слова автора о том, что они не используют доказательство, мы увидим понятие доказательства Евклидовой геометрии, основанной на задуманном количестве.

С другой стороны, писатель говорит об использовании людьми, занимающимися межеванием, «чувственного доказательства». Судя по этому приближению, те, кто занимаются межеванием, для определения неизвестной величины действуют с чувственным доказательством. Прежде всего, в межевании определение «величины» является основой в использованном доказательстве. Об этом мы писали в наших предыдущих работах³³:

³⁰ 46б.

³¹ 47а.

³² الكميات مجهولات-النصفي

³³ Ихсан Фазлыоглу, «Иршад...», с. 333–335; тот же автор, «Прикладная...», с. 19–25.

«Межевание, исследует новый вид величины, полученной после применения непостоянной величины (число-адед) к постоянной величине (количество-микдар). Таким образом; цифры «0, 1, 2, 3, ...» / словесно «ноль, один, два, три, ...» эти устные числа непостоянные величины и этот вид величин, не беря во внимание действия (= потому что действия относятся к счету), исследует наука о числах (= арифметика). Величины, представленные отрезками прямой (= количества) « \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{EF} , ...» являются постоянной величиной и относятся к геометрии. Если величина \overline{AB} будет представлена цифровыми/словесными или устными непостоянными числами, например треугольник $\triangle ABC$ будет записан в виде $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{AC}=5$, то перейдет в науку о межевании, изучающий виды величин. Потому что здесь геометрические постоянные величины обозначены непостоянными величинами; коротко говоря зафиксированы».

В рамках этого понятия, межевальщик из-за использования форменной зарисовки и показывания величины в этой форме делал работу, основанную на интуиции; тем самым правильность измерений устанавливал по форме. С другой стороны, слово «hiss» (чувство) может указывать как на «внутренние» так и на «внешние» чувства; потому что в перипатетическом древнем математическом понятии фигуры в межевании и величина появляются при помощи воображения; из-за того что воображение относится к внутренним чувствам и не имеет ничего общего с общими значениями принимается как чувственное.

Судя по писателю, люди занимающиеся алгеброй используют умственное доказательство и при установлении неизвестной величины действуют умственным доказательством. Что здесь подразумевается под алгебраической величиной и алгебраической наукой? «Вещь равна x », «имущество $= x^2$ » неизвестная величина состоит из определенного числа « a » и в результате отношения/действий неизвестных и известных, вывод/результат к которому пришли/решили, следовательно вычислительная алгебра или в геометрических фигурах находящийся соответствия как минимум представляющий геометрическая алгебра? Использование автором выражения «доказательственный», исходя из древнего выражения «доказательственный» – это геометрическое количество и, принимая во внимания исторические сведения, вышеупомянутое можно сказать, является геометрической алгеброй. Однако с другой точки зрения, автор сравнивает порядок и процесс решения уравнений в алгебре (это значит умственное доказательство), и, беря во внимание внешний вид и предмет, уподобил и в результате этого уподобления и вместе с процессом алгебраических вычислений и формулами мог видеть это как умственное доказательство.

Или объединив два процесса, то есть вычислительную и геометрическую алгебру, возможно, что умственное доказательство рассматривалось как одно целое алгебраическое мышление.

Сведения об авторе: Ихсан Фазлыоглу – Университет «Меденият», член научного совета Турецкого исторического общества, профессор, Ph.D. (философия) (34700, Уналан, 98, Ускудар, Стамбул, Турция); bilgi@ihsanfazlioglu.net

**THE FIRST MATHEMATICAL BOOK IN THE GOLDEN HORDE
STATE: A MASTERPIECE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS
("ET-TUHFE FÎ ILMI'L-HISÂB") (2)***

Ihsan Fazlıođlu
(*Istanbul Medeniyet University*)

The Turkish author Ihsan Fazlıođlu presents to attention of readers the second part of the article "A Masterpiece of Computational Mathematics" ("et-Tuhfe fî ilmi'l-hisâb"). The author of this article presents the first example of an established scientific activity in the Golden Horde, which began before Janibek khan, during the reign of Uzbek khan. The work written in the Golden Horde on a mathematical topic occupies a special place because of the information contained therein. This treatise shows that the scientific activity in the Golden Horde, which began with the conversion to Islam, brought results in a short time and laid the foundations for "breakthroug" during the reign of Janibek khan.

The author examines this composition from a historical perspective. The Computational book "et-Tuhfe fî ilmi'l-hisâb", whose author is unknown, was handed during the reign of Uzbek Khan (1313–1342) to the ruler of the Crimean ulus of the Golden Horde Ebul-Muzaffer Giyaseddin Tuluktemir bey. After mentioning the distinguishing features of the work, the author pays particular attention to the definition of numbers, which is attributed to Muhammad b. Musa al-Khwarizmi and which, at the moment, is not recorded elsewhere. The author disputes the capacity for understanding of the evidence used in the calculation, surveying, and algebra, and will consider definitions with respect to the theory of numbers. Further, the author will analyze the formula of approximate values of square and cube roots of irrational numbers proposed by Muhammad al-Khwarizmi, Abdulkadir al-Baghdadi, and the teacher of the author, Saduruddin al-Farazi.

This part examines the author of the work and features of his age as well as the scientific environment that contributed to the writing of the "et-Tuhfe fî ilmi'l-hisâb". The article presents the contents of the work and familiarizes the reader with the scientists and their works, which are referenced by the author.

Keywords: Golden Horde, Uzbek khan, mathematics, algebra, Dasht-i Kipchak, Islam.

* Continuation. See the beginning in: Golden Horde Review, 2014, № 4(6), pp. 57–68. Russian translation from Turkish by Yu.N. Nagimova and I.M. Mirgaleev.

REFERENCES

1. Ahmed S. Saidan. Numeration and arithmetic. *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, edit. Roshdi Rashed, c. II. New York, 1966, pp. 331–348.
2. Aydın Sayılı. *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik, Astronomi ve Tıp*. Ankara, 1982.
3. *A History of Mathematics*, II. edisyon 1919. New York, 1958.
4. Bağdadlı İsmail Paşa. *Hediyetu'l-arifin*, nşr. Şerefettin Yaltkaya – Kilisli Rifat Bilge, c. II. İstanbul, 1951–1955.
5. Boyer Carl. *A History of Mathematics*. New York, 1991.
6. Brentjes Sonja. The First Perfect Numbers and Three Types of Amicable Numbers in a Manuscript on Elementary Number Theory by Ibn Fellûs. *Erdem*, 1988, c. IV, pp. 11.
7. Devin De Weese. *Islamization and Native Religion in the Golden Horde: Baba Tükles and Conversion to Islam in the Historical and Epic Tradition*. Pennsylvania, The Pennsylvania State University Publ., 1994.
8. Devin De Weese. Problems of Islamization in the Volga-Ural Region: Traditions about Berke Khan. *Proceedings of the International Symposium on Islamic Civilisation in the Volga-Ural Region*. Kazan, 8–11 June 2001. İstanbul, 2004, pp. 3–13.
9. Ebu'l -Gazî Bahadır Han. *Türk Şeceresi [Şecere-i Türk]*. Yayımlayan Rıza Nur. İstanbul, 1925.
10. El-İklîdisî İbrahim. *Kitabu'l-fusul fi'l-hisabi'l-hindî*. Nşr. Ahmed S. Saidan, II. baskı. Amman, 1985.
11. El-Bağdadî Abdulkâhir b. Tahir. *Et-Tekmile fi'l-hisâb*. Tahkik Ahmed Selim Saidan. Kuveyt, 1985.
12. Fazlıoğlu İhsan. Aristoteles'in Sayı Tanımı. *Divân İlmî Araştırmalar Dergisi*. İstanbul, 2004/1, P. 15, pp. 127–138.
13. Fazlıoğlu İhsan. İrşad el-Tullab ila İlm el-Hisab [Hesap Biliminde Öğrencilere Kılavuz]. *Divân İlmî Araştırmalar Dergisi*. İstanbul, 2002/2, p. 13, pp. 321–322.
14. Fazlıoğlu İhsan. Osmanlılar'da Hesab-ı Hindî. *Türkiye Diyanet Vakfı İslam Ansiklopedisi*, c. XVII. İstanbul, 1998.
15. Fazlıoğlu İhsan. *Uygulamalı Geometri'nin Tarihine Giriş: el-İkna fi ilmi'l-misaha*. Dergah Yayınları. İstanbul, 2004.
16. *Fihrist mahtutat belediyyeti'l-İskenderiyye*. Hazr. Yusuf Zeydan. İskenderiye 1996, c. I, nu: 39.
17. George Gheverghese Joseph. *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. New York (bez goda izdaniya).
18. Halperin Charles J. *Russia and the Golden Horde: The Mongol Impact and Russian History*, London 1985 (=1987).
19. İbn Batuta. *Rihlet İbn Batuta*. Thk. Ali el-Muntasır el-Kettanî, c. I. Beyrut, 1985.
20. İzgi C. Camı Bek Han devrinde (1342–1357) Altınordu hanlığında bilim hayatı. *Divan*, 1996/2, pp. 147–172.
21. Kafalı Mustafa. *Altın Orda Hanlığının Kuruluş ve Yükseliş Devirleri*. İ.Ü. İstanbul, Edebiyat Fakültesi Matbaası, 1976.

22. Karatay F.E. *Topkapı Sarayı Müzesi Kütüphanesi, Arapça Yazmalar Kataloğu*, c. III. İstanbul, 1966.
23. Katip Çelebi. *Keşfü'z-zunun an esami'l-kutub ve'l-funun*. Nşr. Kilisli Muallim Rıfat – Şerefeddin Yaltkaya, c. III. İstanbul, 1941–1943.
24. Köprülü Mehmet Fuat. Altın Ordu'ya Ait Yeni Araştırmalar. *Belleten*, c. V. Ankara, 1941, pp. 397–436.
25. Kurat A.N. Altın Ordu Devleti. *Türk Dünyası El Kitabı*, c. I: Coğrafya-Tarih, II. Baskı. Ankara, 1992, pp. 400–408.
26. Kurat A.N. *Topkapı Sarayı Müzesi Arşivindeki Altın Ordu, Kırım ve Türkistan Hanlarına Ait Yarlık ve Bitikler*. Burhaneddin Matbaası, Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Yayınları. Tarih Serisi: 1. İstanbul, 1940.
27. Kehhale Ömer Rıda. *Mucemu'l-muellifn*, c. II, Beyrut. (without the year of publication).
28. Kushyar Ibn Labban. *Principles of Hindu Reckoning*. A Translation with Introduction and Notes by Martin Levey and Marvin Petruck of the Kitab fi Usul Hisab al-Hind. Wisconsin, 1965.
29. Milli Eğitim Bakanlığı *İslam Ansiklopedisi*, c. XII/1. İstanbul, 1993.
30. Mach Rudolf. *Catalogue of Arabic Manuscripts (Yehuda Section in the Garrett Collection)*. Princeton, 1977.
31. Muhammed Süveysî. *Hesap, Türkiye Diyanet Vakfı İslam Ansiklopedisi*, c. XVII. İstanbul, 1998.
32. Otto Neugebauer. *The Exact Sciences in Antiquity*. Providence, 1970.
33. Özkaya T. Sovyetler Birliğinde Altın Ordu ile İlgili Yeni Araştırmalar. *Belleten*, c. LIV, Sayı 209. Ankara, 1990, (Nisan), pp. 497–532.
34. Özyetkin M. *Altın Ordu, Kırım ve Kazan Sahasına Ait Yarlık ve Bitiklerin Dil ve Üslup İncelemesi*. Atatürk Kültür, Dil ve Tarih Yüksek Kurumu, Türk Dil Kurumu Yayınları: 658. Ankara, 1996.
35. Roshdi Rashed. *The Development Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht, 1994.
36. Richard L. Faber, *Foundations of Euclidean and non-Euclidean Geometry*. New York, 1983.
37. Roshdi Rashed. Numerical Analysis. *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, edit. Roshdi Rashed, c. II. New York, 1966.
38. Sabit B. Kurra. *Kitabu'l-adadi'l-mutahabbe*. Tahkik Ahmed Selim Saidan. Amman, 1977.
39. Şeşen R. *Muhtârât mine'l-mahtutati'l-arabiyyetu'n-nâdire fi mektebat Turkiyâ*. İstanbul, 1997.
40. Şeşen R., İzgi C. *Osmanlı Matematik Literatürü Tarihi*. Edit. Ekmeleddin İhsanoğlu, c. I. İstanbul, 1999.
41. Taşağıl Ahmet. İdil-Ural Bölgesinde İslâmiyetin Yayılmaya Başlaması. *Proceedings of the International Symposium on Islamic Civilisation in the Volga-Ural Region*, Kazan, 8–11 June 2001, pp. 101–106.
42. Taşköprülü-zade, *eş-Şekaiku'n-numaniyye fi ulemâi'd-Devleti'l-Osmaniyye*. Nşr. Ahmed Subhi Furat. İstanbul, 1985.
43. Tiesenhansen W. *Altınordu Devleti Tarihine Ait Metinler*. Çev. İsmail Hakkı İzmirli. İstanbul, Maarif Matbaası, 1941.
44. Togan İ. Second Wave of Islam and Özbek Khan: Strategies for Conflict Resolution. *Proceedings of the International Symposium on Islamic Civilisation in the Volga-Ural Region*. Kazan, 8–11 June 2001. İstanbul, 2004, pp. 15–33.

45. Toparlı Recep. *İrşadu'l-müluk ve 's-selâtin*. Ankara, 1992.
46. Van der Waerden. *Bilimin Uyanışı: Eski Mısır, Babilonya ve Eski Yunan Matematiği*. Çeviri: Orhan Ş. İçen ve Yılmaz Öner. İstanbul, 1994.
47. Victor J. Katz. *A History of Mathematics: An Introduction*. New York, 1992.
48. Yakubovskiy A.Y. *Altın Ordu ve İnhitatu [Zolotaya Orda]*. Çev. Hasan Eren. İstanbul, Maarif Basımevi, 1955.
49. Yakubovskiy A.Y. *Altın Ordu ve Çöküşü*. II. Baskı, MEB, Kültür Bakanlığı Yayınları. Ankara, 1976.
50. Yakubovskiy A.Y. *Altın Ordu ve Çöküşü*, III. Baskı T.T.K. Ankara, 1992.

About the author: Ihsan Fazlıoğlu – Istanbul Medeniyet University, member of the Scientific Council of the Turkish Historical Society, Professor, Ph.D. (Philosophy) (34700, Ünalın Mah., No. 98, Üsküdar, Stambul, Turkey); bilgi@ihsanfazlioglu.net